V. Malakhovsky, Yu. Shevchenko, A. Egorov,
M. Rodionov, N. Sadovnikov, A. Sultanov

Prominent Mathematician — Ivan Petrovich Egorov
(on 100th anniversary of his birth)

This work is devoted to 100th anniversary of the birth of prominent geometer I. P. Egorov. The facts from his private life are stated and the main questions of his scientific activity are listed.

УДК 530.12

А. С. Байгашов, А. В. Асташенок
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
a.baigashov@gmail.com
artyom.astashenok@gmail.com

Компактные объекты в модифицированной теории тяготения

Интерес к модифицированным теориям тяготения связан с возможностью объяснения ускоренного расширения Вселенной без введения темной энергии, природа которой неясна. Рассмотрено моделирование компактных звезд в рамках простейшей теории f(R)-гравитации с квадратичным по кривизне членом.

Ключевые слова: модифицированная гравитация, нейтронные звезды, кривизна.

Введение

Ускоренное расширение Вселенной (без «темных» компонент) можно получить, модифицируя общую теорию относительности. Модифицированная гравитация представляет собой реальную альтернативу «темной энергии» (см.: [3; 8]), в рамках которой можно объединить наблюдаемое ускоренное космологическое расширение и раннюю инфляцию (для обзора см.: [6; 7]). Космологические модели, основанные на теориях модифицированной гравитации, могут объяснить данные по сверхновым типа Ia [6] и анизотропию реликтового фона [7]. Но такой подход требует комплексного анализа данных наблюдений не только на космологических масштабах, но и астрофизических. Реалистичными являются только те теории модифицированной гравитации, в которых возможно существование стабильных звезд и галактик. Можно ожидать, что для относительно слабых гравитационных полей результаты, полученные в рамках модифицированных теорий тяготения, не будут существенно отличаться от результатов в общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна. Особый интерес представляет исследование режимов сильного гравитационного поля, которые имеют место для релятивистских астрофизических объектов (нейтронные звезды, гипотетические кварковые звезды, черные дыры).

Уравнения Эйнштейна в *F*(*R*)-теории

В модифицированной f(R) теории тяготения [1; 2] в качестве действия для гравитационного поля берется некоторая функция от скалярной кривизны. Действие материи и гравитационного поля есть

$$S = S_g + S_{matter} e^{i\theta}, \tag{1}$$

$$S_g = \int \sqrt{-g} f(R) d^4 x. \tag{2}$$

Случай ОТО соответствует выбору $f(R) = R$. Вывод уравнений движения производится с помощью вариационного принципа Гамильтона — Якоби. Рассмотрим вариацию действия для гравитационного поля с функцией $f(R)$. При варьировании применяем правило Лейбница:

$$\delta\left(\sqrt{-g}\,f(R)\right)=f(R)\delta\left(\sqrt{-g}\right)+ \\ +\frac{\partial f(R)}{\partial R}\left[g^{ik}\delta(R_{ik})+R_{ik}\delta g^{ik}\right]. \tag{3}$$

Далее рассмотрим по отдельности компоненты, входящие в полученное выражение. Начнем с варьирования тензора Риччи. Если, следуя определению ковариантного дифференцирования исследовать конструкцию $\nabla_l \delta\Gamma^l_{ik}-\nabla_k \delta\Gamma^l_{il}$, то приходим к следующему уравнению:

$$\delta R_{ik}=\nabla_l \delta\Gamma^l_{ik}-\nabla_k \delta\Gamma^l_{il}\,. \tag{4}$$

Таким образом, необходимо вычислить вариацию от символов Кристоффеля. Пользуясь правилом Лейбница, получаем явное выражение:

$$\delta\Gamma^l_{ik}=\frac{1}{2}\delta g^{lm}\left(\partial_i g_{km}+\partial_k g_{im}-\partial_m g_{ik}\right)+ \\ +\frac{1}{2}g^{lm}\left(\partial_i\delta g_{km}+\partial_k\delta g_{im}-\partial_m\delta g_{ik}\right). \tag{5}$$

Для дальнейших выкладок необходимо рассмотреть следующее выражение:

$$\nabla_i\delta g_{km}=\partial_i\delta g_{km}-\Gamma^l_{ki}\delta g_{lm}+\Gamma^l_{im}\delta g_{kl}\,. \tag{6}$$

Выразим теперь из (6) член $\partial_i\delta g_{km}$ и составим конструкцию, опираясь на второе слагаемое из правой части уравнения (5):

$$\partial_i\delta g_{km}+\partial_k\delta g_{im}-\partial_m\delta g_{ik}=2\Gamma^l_{ik}\delta g_{lm}+ \\ +\nabla_i\delta g_{km}+\nabla_k\delta g_{im}-\nabla_m\delta g_{ik}. \tag{7}$$

Преобразуем вариацию метрического тензора, опустив индекс s. Для этого воспользуемся выражением

$$g^{lm}\Gamma^s_{ik}\delta g_{sm}=-\Gamma^s_{ik}g_{ps}\delta g^{pl}\,. \tag{8}$$

Таким образом, для слагаемого

$$\frac{1}{2}\delta g^{lm}\left(\partial_i g_{km}+\partial_k g_{im}-\partial_m g_{ik}\right)$$

правой части уравнения (5) можно получить интересующее нас выражение:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\delta g^{lm}\left(\partial_i\delta g_{km}+\partial_k\delta g_{im}-\partial_m\delta g_{ik}\right)=\\&=\frac{1}{2}\delta g^{lm}\delta_m^p\left(\partial_i\delta g_{kp}+\partial_k\delta g_{ip}-\partial_p\delta g_{ik}\right)=\\&=\frac{1}{2}\delta g^{lp}g^{mq}g_{qp}\left(\partial_i\delta g_{km}+\partial_k\delta g_{im}-\partial_m\delta g_{ik}\right)=\varGamma_{ik}^q g_{qm}\delta g^{lm}.\end{aligned} \tag{9}$$

Складывая теперь полученное выражение с (7), получим искомую вариацию символов Кристоффеля

$$\delta\varGamma_{ik}^l=\frac{1}{2}g^{lm}\left(\nabla_i\delta g_{km}+\nabla_k\delta g_{im}-\nabla^j\nabla_j\delta g_{ik}\right), \tag{10}$$

которая, в свою очередь, дает необходимое выражение для вычисления вариации тензора Риччи:

$$\begin{aligned}\delta R_{ik}&=\frac{1}{2}\left(\nabla^m\nabla_i\delta g_{km}+\nabla^m\nabla_k\delta g_{im}-\nabla^m\nabla_m\delta g_{ik}\right)-\\&-\frac{1}{2}g^{lm}\nabla_i\nabla_k\delta g_{lm}.\end{aligned} \tag{11}$$

Далее, опираясь на (3), окончательно получим

$$\delta R_{ik}g^{ik}=-\nabla_i\nabla_k\delta g^{ik}+g_{ik}\nabla^m\nabla_m\delta g^{ik}. \tag{12}$$

Наконец, используя (3) и принимая во внимание, что

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-g}\right)g_{ik}\delta g^{ik}, \tag{13}$$

получим искомую вариацию действия гравитационного поля в $f(R)$ -гравитации:

$$\delta S_g = \int \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2} f(R) g_{ik} \right] \delta g^{ik} d^4 x - \\ - \int \sqrt{-g} \left(R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla^m \nabla_m \right) f'(R) \delta g^{ik} d^4 x. \quad (14)$$

Для $f(R) = R$ выражение (14), как и следовало ожидать, сводится к вариации действия для ОТО.

Уравнения Толмена — Оппенгеймера — Волкова в модифицированной теории тяготения

Решение уравнений Эйнштейна для компактных объектов следует искать в виде сферически симметричной метрики, которая содержит две неизвестные функции радиальной координаты

$$ds^2 = -c^2 e^{2\psi} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (15)$$

Вариация действия (1) по метрическому тензору g_{ik} дает полевые уравнения для метрических функций

$$f'(R) G_{ik} - \frac{1}{2}\left(f(R) - f'(R) R \right) g_{ik} - \\ - \left(\nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla^m \nabla_m \right) f'(R) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad (16)$$

где $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$ — тензор Эйнштейна, $f'(R) = df(R)/dR$ — производная функции по скалярной кривизне, а T_{ik} — тензор энергии-импульса, который для простейшего случая будет иметь вид

$$T_{ik} = diag\left[e^{2\psi} \rho c^2, e^{2\lambda} p, r^2 p, \sin^2(\theta) p \right], \quad (17)$$

где ρ — плотность материи, а p — давление.

Определив, таким образом, все необходимые компоненты, входящие в модифицированные уравнения Эйнштейна, можно получить систему дифференциальных уравнений, решение которой даст необходимые зависимости массы, давления и плотности энергии от координаты.

Компоненты уравнения (16) дают уравнения Толмена — Оппенгеймера — Волкова для $f(R)$ -гравитации:

$$\frac{f'(R)}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2\lambda}\right)\right]=8\pi\rho+\frac{1}{2}\left(f'(R)R-f(R)\right)+ \\ +e^{-2\lambda}\left[\left(\frac{2}{r}-\frac{d\lambda}{dr}\right)\frac{df'(R)}{dr}+\frac{d^2 f'(R)}{dr^2}\right], \tag{18}$$

$$\frac{f'(R)}{r}\left[2e^{-2\lambda}\frac{d\psi}{dr}-\frac{1}{r}\left(1-e^{-2\lambda}\right)\right]=8\pi\rho+ \\ +\frac{1}{2}\left(f'(R)R-f(R)\right)+e^{-2\lambda}\left(\frac{2}{r}+\frac{d\psi}{dr}\right)\frac{df'(R)}{dr}. \tag{19}$$

Еще одно необходимое уравнение получается из применения тождества Бьянки к тензору энергии импульса $\nabla_k T_i^k=0$:

$$\frac{dp}{dr}=-\left(p+\rho c^2\right)\frac{d\psi}{dr}. \tag{20}$$

В $f(R)$ -гравитации скалярная кривизна является независимой переменной. Уравнение для R можно получить, вычисляя след уравнения (16):

$$e^{2\lambda}\nabla^m\nabla_m f'(R)+f'(R)R-2f(R)=-8\pi\left(\rho-3p\right). \tag{21}$$

Здесь

$$e^{2\lambda}\nabla^m\nabla_m=-e^{2\lambda-2\psi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{d\psi}{dr}-\frac{d\lambda}{dr}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}. \tag{22}$$

Заметим, что при $f(R)=R$ получается простое соотношение

$$R=8\pi\left(\rho-3p\right). \tag{23}$$

Система дифференциальных уравнений (18), (19), (20) и (23) замыкается уравнением состояния $p = p(\rho)$. Массовый параметр связан сметрической функцией следующим образом:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \tag{24}$$

Модели нейтронных звезд в модифицированной теории тяготения

Рассмотрим простой случай квадратичной гравитации:

$$f(R) = R + \alpha R^2. \tag{25}$$

Подставляя функцию (25) в систему уравнений (18) и (19), получим:

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi G\rho}{c^2} &= \left[-r^{-2} + e^{-2\lambda}\left(1 - 2r\lambda'_r\right)r^{-2}\right]\left(1 + 2\alpha R\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\alpha R^2 + 2e^{-2\lambda}\left(Rr^{-1}\left(2 - r\lambda'_r\right) + 2\right), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G\rho}{c^4} &= \left[-r^{-2} + e^{-2\lambda}\left(1 + 2r\psi'_r\right)r^{-2}\right]\left(1 + 2\alpha R\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\alpha R^2 + 2e^{-2\lambda}\left[Rr^{-1}\left(2 - r\psi'_r\right) + 2\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

Чтобы оценить реалистичность исследуемой теории модифицированной гравитации, необходимо получить зависимость масса-радиус для нейтронных звезд и сравнить полученные результаты с общей теорией относительности. Удобно использовать следующие соотношения:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \Rightarrow \frac{gdM}{c^2 dr} = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-2\lambda}\left(1 - 2r\lambda'_r\right)\right], \tag{28}$$

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{m}{r}\left(\frac{1 - \frac{r}{m}\frac{dm}{dr}}{2m - r}\right). \tag{29}$$

В качестве уравнения состояния используем уравнение, предложенное в [4; 5]. Система уравнений (26) и (27) может быть решена методами теории возмущений. Скалярная кривизна в нулевом порядке определяется плотностью и давлением вещества. Члены, содержащие квадратичную добавку, полагаем малыми по сравнению со скалярной кривизной. Соотношение масса-радиус для нейтронных звезд представлено для некоторых значений α на рисунках ниже.

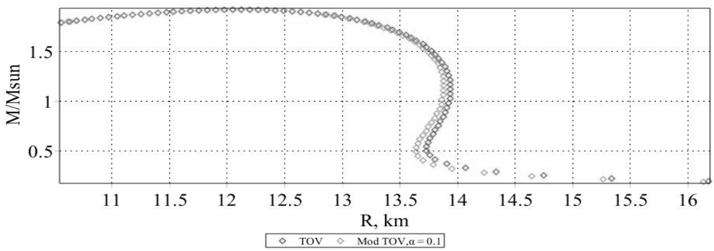

Рис. 1. Зависимость масса-радиус для нейтронных звезд

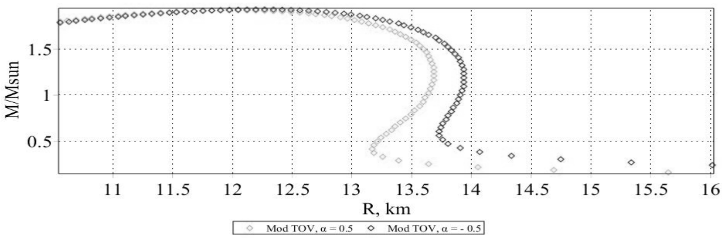

Рис. 2. Зависимость масса-радиус для нейтронных звезд

Можно заметить, что зависимость масса-радиус для звезд в модифицированной теории тяготения близка к таковой в ОТО. Следовательно, рассмотренная модель, по крайней мере, не менее реалистична, чем ОТО.

Список литературы

1. *Capozziello S.* Int. J. Mod. Phys. 2002. № 483.

2. *Capozziello S., Carloni S., Troisi A.* Recent Res. Dev. Astron. Astrophys. 2003. № 625.

3. *Douchin F., Haensel P.* Phys. Lett. 2000. № 107.
4. *Glendenning N.K., Moszkowski S.A.* Phys. Rev. Lett. 1991. № 67. P. 2414.
5. *Glendenning N.K., Schaffner-Bielich J.* Phys. Rev. Lett. 1998. № 81. P. 4564.
6. *Perlmutter S. et al.* Supernova Cosmology Project Collaboration. Astrophys. J. 1999. № 565.
7. *Riess A.G. et al.* Supernova Search Team Collaboration. Astron. J. 1998. № 116. P. 1009.
8. *Vidana I. et al.* Phys. Rev. C. 2000. № 62. P. 035801.

A. Baigashov, A. Astashenok

Compact objects in modified gravity

Alternatives to General Relativity have been developed in order to solve several shortcomings related to the ultraviolet and infrared behaviors of the gravitational field as formulated in the Einstein theory. In particular, Extended Theories of Gravity could successfully address the recently established phenomenon of the accelerated expansion of the universe.

УДК 513.82

М.Б. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

О почти контактных метрических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли

Доказано, что гиперповерхности с типовым числом два 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли допускают почти контактную метрическую структуру, отличную от структур Сасаки и Кенмоцу.

Ключевые слова: келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, структура Сасаки, структура Кенмоцу, типовое число.